Μάθημα 4ο

02/03/18

$$\underbrace{z}_{\in\mathbb{C}} = \underbrace{x+iy}_{\substack{\text{αλγεβρική}\\ \text{μορφή}}} = \underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2}$$

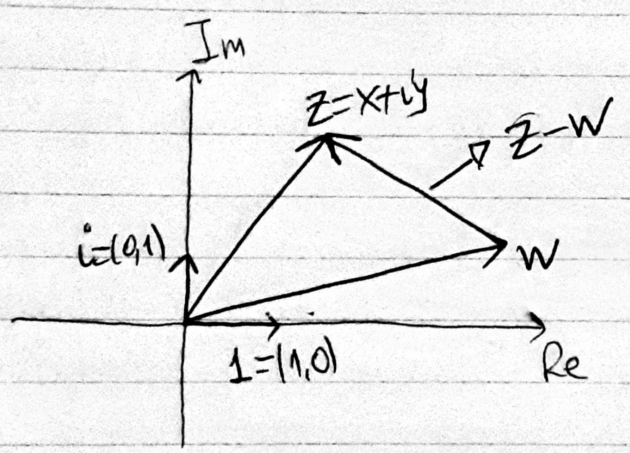
όπου $x,y \in \mathbb{R}$

Πράξεις: $+, \cdot$ «όπως στο $\mathbb{R}$» με $i^2=-1$
(δηλ. $(\mathbb{C},+,\cdot)$ σώμα)

$$\underbrace{|z|}_{\substack{\text{απόλυτη}\\ \text{τιμή του}\\ z}} = \sqrt{x^2+y^2} = \text{απόσταση του } z \text{ από το } 0$$

$= \|(x,y)\|$ στον $\mathbb{R}^2$

$|z-w| =$ απόσταση μεταξύ του z και w



$\bar{z} := x - iy$
$Re\, z = x$
$Im\, z = y$

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτουν πολλές ιδιότητες

Πχ $z\bar{z} = |z|^2$

π.χ. $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\bar{w}}{w\bar{w}} = \dfrac{z\bar{w}}{|w|^2}$

Επίσης: $z^n = \underbrace{z \dots z}_{n\text{-φορές}}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $z\in\mathbb{C}$, $z^{-n} = \dfrac{1}{z^n}$ $\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\forall\, n\in\mathbb{N}$

$z^0 := 1$ $\forall\, z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ (πολλές φορές (βλ. συνέχεια) και $0^0=1$)

$e^{iy} = \cos y + i\sin y$, $y\in\mathbb{R}$, ο τύπος του Euler

Σε όλο το μάθημα θα θεωρούμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις (στο $\mathbb{R}$) και τις ιδιότητές τους γνωστές.

$$|e^{iy}|=1, \quad \frac{1}{e^{iy}} = e^{-iy}, \quad \overline{e^{iy}} = e^{-iy}$$

$$\boxed{e^{i(y+2k\pi)} = e^{iy} \quad \forall k\in\mathbb{Z}}$$

και $e^{i\varphi} = e^{i\psi}$ με $\varphi,\psi\in\mathbb{R}$

$$\Rightarrow e^{i\varphi}\cdot\frac{1}{e^{i\psi}} = 1 \Rightarrow e^{i\varphi}\cdot e^{-i\psi} = 1 \Rightarrow e^{i(\varphi-\psi)} = \cos(\varphi-\psi)+i\sin(\varphi-\psi)$$

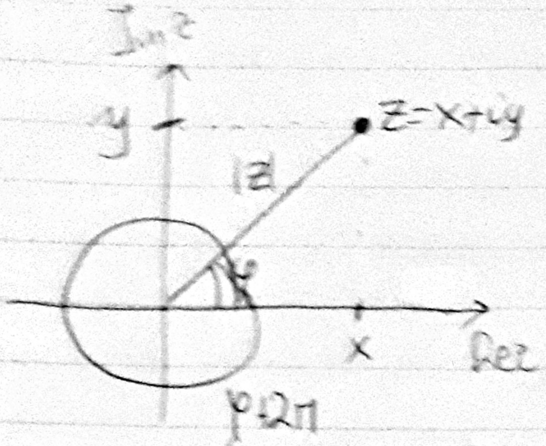
$$\Rightarrow \cos(\varphi-\psi)=1, \quad \sin(\varphi-\psi)=0$$

$$\Rightarrow \varphi-\psi = 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$$

[illegible]

Δηλαδή: $\boxed{e^{iy} = 1, \ y\in\mathbb{R} \iff y = 2k\pi, \ k\in\mathbb{Z}}$

Πολική Μορφή του $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$



$$\mathbb{R}^2 \ni (x,y) = (\underbrace{|z|}_{\substack{r \\ \sqrt{x^2+y^2}}}\cos\varphi,\ \underbrace{|z|}_{r}\sin\varphi)$$

$$z = x+iy = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi} = |z|e^{i\varphi}1 = |z|e^{i\varphi}e^{i2\kappa\pi} = |z|e^{i(\varphi+2\kappa\pi)}, \ \kappa\in\mathbb{Z}$$

$$\Longrightarrow \forall\, z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} \qquad z = |z|e^{i(\varphi+2\kappa\pi)}, \ \kappa\in\mathbb{Z}$$

όπου τα $\varphi+2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ αποτελούν το <u>όρισμα</u> του z και είναι μοναδικό$^{\circledast}$, $\arg z = \varphi+2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$
(ή αλλιώς $\arg z = \{\varphi+2\kappa\pi : \kappa\in\mathbb{Z}\}$) και από αυτές

τις γωνίες ($\in \arg z$) επιλέγουμε αυτήν η οποία βρίσκεται στο $(-\pi,\pi]$, είναι μοναδική και ονομάζεται πρωτεύουσα ή κύρια τιμή του ορίσματος $\arg z$
συμβολίζουμε (principal value)

$$\operatorname{Arg} z \in \arg z \quad \text{με} \quad \operatorname{Arg} z \in (-\pi,\pi]$$

<u>πχ</u> $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \underbrace{1}_{=|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$= e^{i\frac{5\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}-2\pi\right)} = e^{i\,-\frac{7\pi}{4}} = e^{-i\frac{7\pi}{4}} = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\varphi\pi\right)}$$

Όλα τα $\frac{\pi}{4}+2\kappa\pi$, $\kappa\in\mathbb{Z}$ ικανοποιούν την $z = e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2\kappa\pi\right)}$

και αποτελούν το όρισμα του z.

και υπάρχει μοναδική τιμή από αυτά $\left(\text{η } \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2\cdot \underset{k}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot \pi \right)$ η οποία βρίσκεται στο $(-\vartheta, \vartheta]$, η κύρια τιμή του ορίσματος

<u>π.χ.</u> Για $x<0$ (δηλαδή $x \in \mathbb{R}$ με $x<0$) έχουμε

$$z = x = -|x| = |x|(-1+0i) = |x|\underbrace{(\cos\pi + i\sin\pi)}^{e^{i\pi}}$$

Συνεπώς για $x<0$ έχουμε $\arg x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ με κύρια τιμή (να είναι δηλαδή στο $(-\pi,\pi]$)

$$\operatorname{Arg} x = \pi.$$

Για $a>0$ $\quad \arg a = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ με κύρια τιμή $\operatorname{Arg} a = 0$

<u>π.χ.</u> $z = 2 = \underset{\substack{\shortparallel \\ |z|}}{2} e^{i \overbrace{\arg z}^{2k\pi}} = 2e^{i\cdot 0} = \operatorname{Arg} z$

<u>Παρατήρηση</u>

1) Η επιλογή ενός συγκεκριμένου αριθμού από όλες τις δυνατές γωνίες του ορίσματος $\arg z$ ενός μιγαδικού z έχει το εξής πλεονέκτημα

$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\exists(!)$ $(|z|, \operatorname{Arg} z) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi]$ που χαρακτηρίζουν πλήρως το $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$

Από την άλλη είναι σωστό και να γράφουμε

$z=|z|e^{i\arg z}$, όπου $\arg z=\operatorname{Arg}z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

2) Το $\operatorname{Arg}z\in(-\pi,\pi]$ είναι μοναδικό για δοσμένο $z\in\mathbb{C}$ (αλλά και το $\arg z=\operatorname{Arg}z+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$ είναι μοναδικό «$\bmod 2\pi$»)

υπό την εξής έννοια: $\underbrace{z_1}=\underbrace{z_2}$

$$=|z_1|e^{i\arg z_1}=|z_2|e^{i\arg z_2}=|z_1|e^{i\varphi_1}=|z_2|e^{i\varphi_2}$$

$$z_1=z_2\Rightarrow |z_1|=|z_2|\Rightarrow \underbrace{\left||z_1|e^{i\varphi_1}\right|}_{=|z_1|\underbrace{|e^{i\varphi_1}|}_{=1}}=\underbrace{\left||z_2|e^{i\varphi_2}\right|}_{|z_2|\underbrace{|e^{i\varphi_2}|}}$$

Άρα $z_1=z_2\Rightarrow e^{i\varphi_1}=e^{i\varphi_2}\Rightarrow e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}=1$

$$\Rightarrow \varphi_1-\varphi_2=2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}z_1+2k_1\pi-(\operatorname{Arg}z_2+2k_2\pi)=2k\pi$$

$$\Rightarrow \operatorname{Arg}z_1=\operatorname{Arg}z_2+2(k-k_1+k_2)\pi.$$

Η μεγάλη χρησιμότητα της πολικής μορφής φαίνεται στον πολλαπλ. Έστω $z_1=|z_1|e^{i\operatorname{Arg}z_1}=|z_1|e^{i\arg z_1}$

$$z_2=|z_2|e^{i\operatorname{Arg}z_2}=|z_2|e^{i\arg z_2}\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$$

Τότε $z_1z_2=|z_1|e^{i\operatorname{Arg}z_1}|z_2|e^{i\operatorname{Arg}z_2}=\underbrace{|z_1||z_2|}_{|z_1z_2|}e^{i(\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2)}$

$\overset{1)}{\Rightarrow} Arg(z_1 z_2) = Arg z_1 + Arg z_2 + 2k\pi$ για κάποιο $k \in \mathbb{Z}$

<u>π.χ.</u> αν $Arg z_1 = \frac{3\pi}{4} = Arg z_2 \Rightarrow Arg z_1 + Arg z_2 = \frac{3\pi}{2} \in arg(z_1 z_2)$

και $\frac{3\pi}{2} = \underbrace{-\frac{\pi}{2}}_{\in(-\pi,\pi]} + 2\pi$ δηλαδή στο παράδειγμα

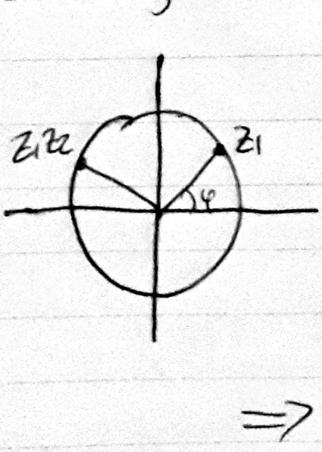
$Arg(z_1 z_2) = -\frac{\pi}{2}$

Άρα μπορούμε να γράψουμε $arg(z_1 z_2) = \{Arg z_1 + Arg z_2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

2) Το $z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(arg z_1 + arg z_2)}$ σημαίνει γεωμετρικά

ότι στον πολλαπλ. ενός μιγαδικού z_1 με έναν άλλο z_2 <u>πολλαπλασιάζουμε τα μήκοι των αντίστοιχων διανυσμάτων</u> (δηλ. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ και «στρέφουμε τον z_1 <u>κατά</u> $arg z_2$

Ειδικότερα για $|z|=1$, δηλ. $z \in S := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ (μοναδιαίος κύκλος στο $\mathbb{C}$)



έχουμε $z = e^{i\varphi}$, $z_1, z_2 \in S$

$\Rightarrow z_1 = e^{i\varphi_1}, \; z_2 = e^{i\varphi_2}$

$\Rightarrow z_1 z_2 = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

Άσκηση 1.0: 1) για $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ $\quad \text{Arg} z = -\text{Arg} \bar{z}$

2) για $z \in (-\infty, 0)$ $\quad \text{Arg} z = \text{Arg} \bar{z} = \pi$

3) για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ ! Ως τώρα ορίσαμε το όρισμα $\arg z$ για $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Αυθαίρετα ορίζουμε $\arg 0 := 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
$= 0 + 2k\pi$

$\text{Arg} 0 := 0$

$$\boxed{z = |z| e^{i\text{Arg} z} = |z| e^{i\arg z} \quad \forall z \in \mathbb{C}}$$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $z^n = \left(|z| e^{i\arg z}\right)^n = |z|^n \left(e^{i\underbrace{\arg z}_{\varphi}}\right)^n =$

$= |z|^n e^{in\underbrace{\arg z}_{=\varphi}}$

Ειδικότερα για $|z| = 1$, δηλαδή $z = e^{i\varphi}$ έχουμε

$$\left(e^{i\varphi}\right)^n = e^{in\varphi} \Leftrightarrow \boxed{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

de Moivre

Εφαρμογή: Γράψτε τα $\cos 3\varphi$, $\sin 3\varphi$ ως πολυώνυμα.

ΛΥΣΗ $\quad \forall a, b \in \mathbb{C}$: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$\Rightarrow a = x$, $b = iy$ Τότε:

$(x+iy)^3 = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 y - y^3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \underbrace{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^3}_{\overset{\text{de Moivre}}{=} \cos 3\varphi + i\sin 3\varphi} = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi + i(3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi)$

Άσκηση: Δ.Ο: $1+z+\dots+z^n = \frac{1-z^n}{1-z}$

$\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, $n\in\mathbb{N}$. Χρησιμοποίησε το για να δείξεις:

$$\sum_{k=0}^{n} r^k \cos(k\theta) = \frac{1-r^n\cos(n\theta)-r\cos\theta+r^{n+1}\cos((n+1)\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2}$$

$\boxed{n\in\mathbb{N},\ \theta\in\mathbb{R},\ r>0.}$

Άσκηση: Δ.Ο. $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ $|Arg(-z)+Arg z| = \pi$

Επίλυση της εξίσωσης $z^n=w$, $n\in\mathbb{N}$, $w\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$

Έστω $w=re^{i\theta}$ $(r=|w|, \theta=\arg w)$

Τότε οι αριθμοί $\boxed{z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)},\ k=0,\dots n-1}$

είναι οι "n" διαφορετικές λύσεις της εξίσωσης (και Θ.Θ.Α. δεν υπάρχουν άλλες)

Πράγματι: $z_k^n = \left(|z_k|e^{i\arg z_k}\right)^n = |z_k|^n e^{in\arg z_k} = re^{i(\theta+2k\pi)} =$

$= re^{i\theta} = w$ και για $k,\ell\in\{0,1,\dots,n-1\}$

$k\neq\ell$ ΘΝΔΟ: $z_k\neq z_\ell$

Έστω $z_k=z_\ell \xRightarrow[|z_k|=|z_\ell|]{} e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} = e^{i\left(\frac{\theta+2\ell\pi}{n}\right)} =$

$= e^{i\left(\frac{\theta+2\ell\pi}{n}+2m\pi\right)}$, $m\in\mathbb{Z}$

$\xRightarrow[\text{1η ώρα σήμερα}]{\text{6η}}$ $\cancel{\theta}+2k\cancel{\pi} = \cancel{\theta}+2\ell\cancel{\pi}+2nm\cancel{\pi}$

$k-\ell = nm\in\mathbb{Z} \Rightarrow |k-\ell| = n|m|$

$e^{iy}=1 \Rightarrow$ Όμως $\left.\begin{array}{l} k-l \le k-0 \le n-1 \\ l-k \le l-0 \le n-1 \end{array}\right| \Rightarrow |k-l| \le \underbrace{n-1}_{\geq 0}$

$\Rightarrow n|m| \le n-1 \Rightarrow |m| \le \frac{n-1}{n} \in [0,1) \xRightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=0 \Rightarrow \boxed{k=l}$

$\underbrace{z^n}=w=re^{i\theta}$

$=|z|^n e^{i n\arg z} \xRightarrow[\text{ίσοι αριθμοί}]{\text{σε πολ. τιμές}} |z|^n=r \Leftrightarrow |z|=r^{\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow n\arg z=\theta+2k\pi \quad, k\in\mathbb{Z}$

$\Rightarrow \arg z=\frac{\theta+2k\pi}{n} \quad, k\in\mathbb{Z}$

Συνεπώς μόνο τα $\frac{\theta+2k\pi}{n}$, $k=0,\dots,n-1$ είναι «πρωτότυπα» (για όλα τα άλλα $k\in\mathbb{Z}$ παίρνω τα ίδια)